SỞ GD&ĐT TỈNH NAM ĐỊNH
CT THPT H. MỸ LỘC – VỤ BẢN

(Đề thi có 06 trang)

KỲ THI THỬ TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM 2023
Bài thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ, tên thí sinh:...

Số báo danh:...

Mã đề thi 111

Câu 1: Biết $\int_1^2 f(x)dx = 2$ và $\int_1^5 f(x)dx = 5$, khi đó $\int_2^5 f(x)dx$ bằng

A. 3. **B.** 7. **C.** 10. **D.** -3.

Câu 2: Cho khối chóp có thể tích $4a^3$ và diện tích đáy $4a^2$. Chiều cao của khối chóp đã cho bằng

A. a. **B.** $2a$. **C.** $3a$. **D.** $4a$.

Câu 3: Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục Ox và các đường thẳng $x = 0, x = \pi$ quay xung quanh Ox. Thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng

A. $\int_0^\pi \sin x\, dx$. **B.** $\int_0^\pi \sin^2 x\, dx$. **C.** $\pi\int_0^\pi \sin^2 x\, dx$. **D.** $\pi\int_0^\pi \cos^2 x\, dx$.

Câu 4: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x + \sin x$ là

A. $4 - \cos x + C$. **B.** $2x^2 + \cos x + C$. **C.** $2x^2 - \cos x + C$. **D.** $4 + \cos x + C$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-1;1)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 5 = 0$. Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là

A. $(-2;4;-6)$. **B.** $(-1;2;-3)$. **C.** $(2;-4;6)$. **D.** $(1;-2;3)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1;-2;3)$ và $\vec{b} = (-1;3;0)$. Vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

A. $(-2;5;-3)$. **B.** $(2;-5;3)$. **C.** $(0;1;3)$. **D.** $(2;-5;-3)$.

Câu 8: Cho khối lăng trụ tam giác có chiều cao $h = 3$ và đáy là tam giác đều cạnh $a = 2$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $3\sqrt{3}$. **B.** $6\sqrt{3}$. **C.** 6. **D.** $9\sqrt{3}$.

Câu 9: Một cấp số cộng có hai số hạng liên tiếp là -6 và 4. Số hạng tiếp theo của cấp số cộng là

A. -2. **B.** 10. **C.** 14. **D.** 2.

Câu 10: Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 3$ và độ dài đường sinh $l = 5$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 30π. **B.** 15π. **C.** 45π. **D.** 24π.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	2	$\searrow$	$-4\ \|\|\ +\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

A. $x=0$. **B.** $y=2$. **C.** $y=0$. **D.** $x=2$.

Câu 12: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5} x+2\ge 0$ là

A. $(-\infty;4]$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(0;4]$. **D.** $(0;4)$.

Câu 13: Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

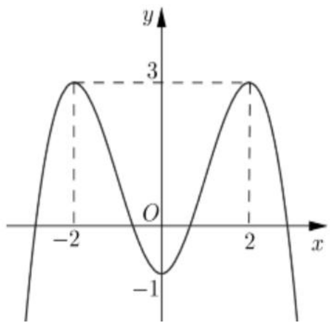
A. $y=3x^4-6x^2+3$. **B.** $y=-x^3+3x+3$. **C.** $y=x^4-2x^2+3$. **D.** $y=-x^4-2x^2+3$.

Câu 14. Cho số thực a thỏa mãn $a^3>a^\pi$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0<a<1$. **B.** $a<1$.. **C.** $a>1$. **D.** $a=1$.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm phân biệt là **A.** 0. **B.** 1.

C. 2. **D.** 3.



Câu 16: Tập xác định của hàm số $y=(9-x^2)^{\frac{1}{3}}+(x-2)^{-2}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $D=(-3;2)\cup(2;3)$. **C.** $D=[-3;3]\setminus\{2\}$. **D.** $D=(-3;3)$.

Câu 17: Với a,b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_3 b-2\log_9 a=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=27b$. **B.** $a=9b$. **C.** $b-a=9$. **D.** $b=9a$.

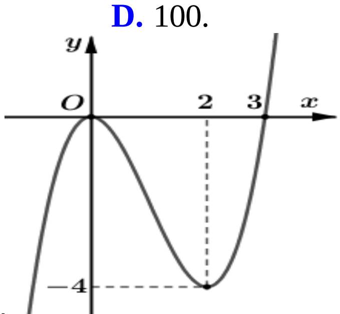
Câu 18: Một họa sĩ cần trưng bày 10 bức tranh nghệ thuật khác nhau thành một hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách để họa sĩ sắp xếp các bức tranh?

A. 10. **B.** 10!. **C.** 10^{10}. **D.** 100.

Câu 19: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như như hình vẽ bên. Điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho là

A. $x=0$. **B.** $x=2$.

C. $(0;0)$. **D.** $(2;-4)$.



Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy)?

A. $\vec{i}=(1;0;0)$. **B.** $\vec{j}=(0;1;0)$. **C.** $\vec{k}=(0;0;1)$. **D.** $\vec{n}=(1;1;1)$.

Câu 21: Nghiệm của phương trình $2^{1-3x}=\dfrac{1}{32}$ là

A. $x=2.$ **B.** $x=1.$ **C.** $x=\dfrac{1}{3}.$ **D.** $x=-\dfrac{4}{3}.$

Câu 22: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số $y=f\left(x\right)+1$ bằng

A. 3. **B.** $-2.$ **C.** $-1.$ **D.** 0.

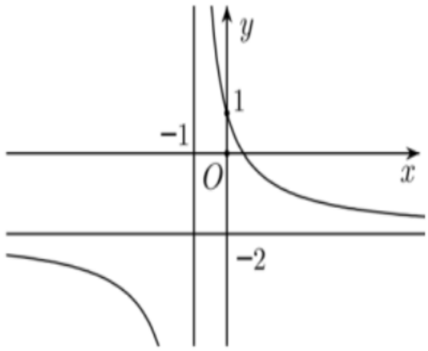
Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(1;-2;5\right)$ và $B\left(-2;-2;1\right)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. 25. **B.** $5\sqrt{2}.$ **C.** $\sqrt{53}.$ **D.** 5.

Câu 24: Cho hình nón có bán kính đáy $r=3$ và góc ở đỉnh bằng 60°. Thể tích của khối nón giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $9\sqrt{3}.$ **B.** $27\sqrt{3}\pi.$ **C.** $27\pi.$ **D.** $9\sqrt{3}\pi.$

Câu 25: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?



A. $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}.$ **B.** $y=-x^3+x+1.$

C. $y=\dfrac{-2x-1}{x+1}$ **D.** $y=-x^4+2x^2+1.$

Câu 26: Biết $F\left(x\right)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3\left[2+f\left(x\right)\right]dx$ bằng

A. 14. **B.** 12. **C.** $\dfrac{38}{3}.$ **D.** 11.

Câu 27: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int\sin\left(x-1\right)dx=-\cos\left(x-1\right)+C.$ **B.** $\int 3^x dx=3^x\ln 3+C.$

C. $\int\dfrac{1}{x}dx=\ln\left|x\right|+C.$ **D.** $\int\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C.$

Câu 28: Đạo hàm của hàm số $y=\log_3\left(3x+1\right)$ là

A. $y'=\dfrac{1}{\left(3x+1\right)\ln 3}.$ **B.** $y'=\dfrac{3}{\left(3x+1\right)\ln 3}.$ **C.** $y'=\dfrac{3}{3x+1}.$ **D.** $y'=\dfrac{1}{3x+1}.$

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(-2;0;1\right)$ và $B\left(-2;2;-3\right)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $2x-y+z+6=0.$ **B.** $y-2z+3=0.$ **C.** $y-2z-3=0.$ **D.** $2x-y+z-6=0.$

Câu 30: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=x^3-6x$ trên đoạn $\left[-1;4\right]$ là

A. $-4\sqrt{2}$. **B.** -5. **C.** 5. **D.** 40.

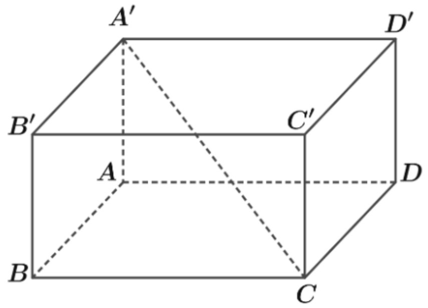
Câu 31: Năm 2023 một hãng xe niêm yết giá bán loại xe X là $750.000.000$ đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2030 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu? *(kết quả làm tròn đến hàng nghìn).*

A. $677.941.000$ đồng. **B.** $638.072.000$ đồng.
C. $664.382.000$ đồng. **D.** $651.094.000$ đồng.

Câu 32: Số nghiệm của phương trình $\log_3\left(x^2+4x\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(3x+6\right)=0$ là

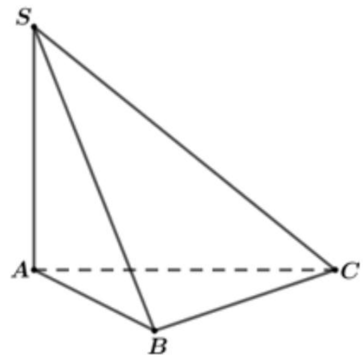
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 33: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA'=AD=a$, $AB=a\sqrt{2}$ *(tham khảo hình vẽ)*. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng



A. 30°. **B.** 45°.
C. 90°. **D.** 60°.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC có $AB=a$, $AC=2a$, $BAC=120^\circ$ *(tham khảo hình vẽ)*. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng



A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
C. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=x.\cos 2x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=\dfrac{1}{4}$. Hàm số $f(x)$ là

A. $\dfrac{1}{2}x\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x$. **B.** $\dfrac{1}{2}x\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x+\dfrac{1}{4}$.
C. $-\dfrac{1}{2}x\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x$. **D.** $-\dfrac{1}{2}x\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x+\dfrac{1}{4}$.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x+2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Mặt phẳng (Q) đi qua A, B và vuông góc với (P) có phương trình dạng $ax+by+cz+11=0$. Tổng $a+b+c$ bằng

A. -5. **B.** 5. **C.** -20. **D.** 20.

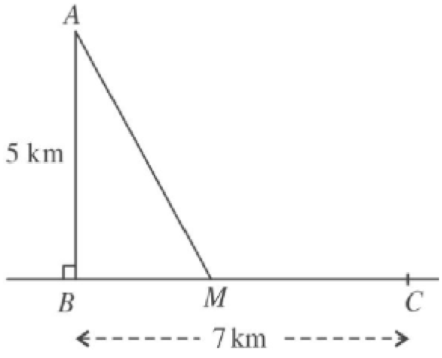
Câu 38: Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ít nhất 3 chữ số và các chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $1,2,3,4,5$. Chọn ngẫu nhiên hai số từ S. Xác xuất để hai số chọn được đều là số có ba chữ số là

A. $\dfrac{238}{1495}$. **B.** $\dfrac{59}{1495}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{267}{2990}$.

Câu 39: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(x-1).\log\left(e^{-x}+m+2023\right)=x-2$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 2023. **B.** 2024. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 40: Một ngọn hải đăng được đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB=5km$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng $BC=7km$ *(tham khảo hình vẽ)*. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ vị trí A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc $4km/h$ và đi bộ đến kho C với vận tốc $6km/h$. Hỏi muộn nhất mấy giờ người đó phải xuất phát từ vị trí A để có mặt ở kho C lúc 7 giờ sáng?



A. 4h 54 phút. **B.** 4h 55 phút.
C. 4h 53 phút. **D.** 5h 02 phút.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $x^2f\left(x^5\right)+xf\left(1-x^4\right)=-3x^4+x+3,\forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{23}{28}$. **B.** $\frac{207}{560}$. **C.** $-\frac{115}{7}$. **D.** $\frac{115}{63}$.

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-3)^2=8$ và hai điểm $A(4;-4;3)$, $B(1;-1;7)$. Gọi (C_1) là tập hợp các điểm $M\in(S)$ sao cho biểu thức $|MA-2MB|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết (C_1) là một đường tròn, bán kính của đường tròn đó là

A. 2. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 43: Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn tâm O và O', chiều cao $h=a\sqrt{3}$. Mặt phẳng đi qua tâm O và tạo với OO' một góc $30°$, cắt hai đường tròn tâm O và O' tại bốn điểm là bốn đỉnh của một hình thang có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ và diện tích bằng $3a^2$. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\pi a^3\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 44: Xét các số thực x,y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{8x+4}{2x-y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

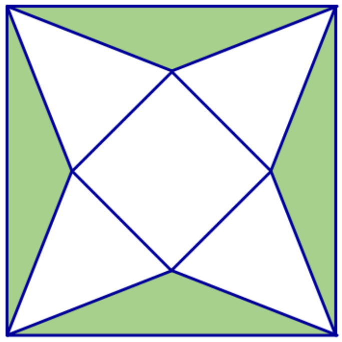
Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;8]$ và thỏa mãn

$$\int_1^2\left[f\left(x^3\right)\right]^2dx+2\int_1^2 f\left(x^3\right)dx-\frac{4}{3}\int_1^8 f(x)dx=-\frac{247}{15}.$$

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[1;8]$. Tích phân $\int_1^8 xF'(x)dx$ bằng

A. $\frac{257\ln 2}{2}$. **B.** $\frac{257\ln 2}{4}$. **C.** 160. **D.** $\frac{639}{4}$.

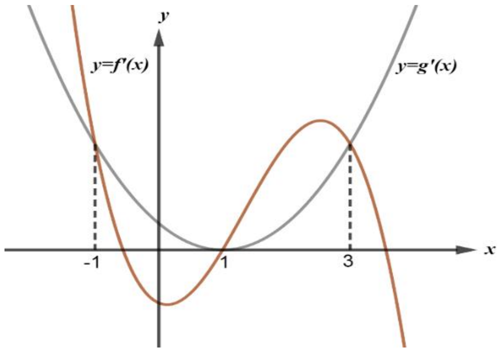
Câu 46: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $1(m)$ như hình vẽ bên. Người ta cắt phần tô đậm của tấm nhôm rồi gập thành một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $x(m)$ sao cho bốn đỉnh của hình vuông gập lại thành đỉnh của hình chóp. Giá trị của x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất là



A. $x=\frac{1}{2}$. **B.** $x=\frac{3}{5}$.

C. $x=\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $x=\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Câu 47: Cho hàm số bậc bốn $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\,(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$ và hàm số bậc ba $g(x)=mx^3+nx^2+px+q\,(m,n,p,q\in\mathbb{R})$ có đồ thị $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ như hình vẽ bên dưới.

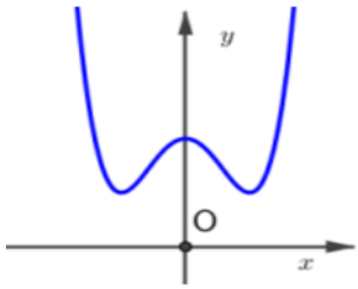


Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng 96 và $f(2)=g(2)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=g(x)$ và $x=0, x=2$ bằng

A. $\frac{136}{15}$. **B.** $\frac{272}{15}$. **C.** $\frac{136}{5}$. **D.** $\frac{68}{15}$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$, biết hàm số $y=f''(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có đồ thị như hình vẽ bên.

Đặt $g(x)=2f\left(\frac{1}{2}x^2\right)+f\left(-x^2+6\right)$, với $g(0)>0$ và $g(2)<0$. Số điểm cực tiểu của hàm số $y=|g(x)|$ là



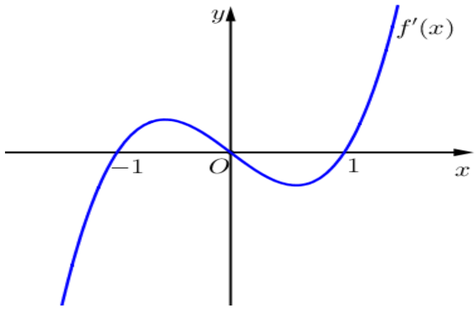
A. 3. **B.** 4.

C. 5. **D.** 7.

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-10;6;-2), B(-5;10;-9)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y-z+12=0$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (α) sao cho MA, MB tạo với (α) các góc bằng nhau và biểu thức $T=2MA^2-MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b+c$ bằng

A. $-\frac{464+4\sqrt{58}}{29}$. **B.** -6. **C.** 6. **D.** $\frac{464-4\sqrt{58}}{29}$.

Câu 50: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ thỏa mãn $f(0)=3f(2)=-3$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-20;20)$ để hàm số $g(x)=f\left[4f(x)-f''(x)+m\right]$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 30. **B.** 29. **C.** 0. **D.** 10.

--------------------**HẾT**--------------------

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Biết $\int_1^2 f(x)dx=2$ và $\int_1^5 f(x)dx=5$, khi đó $\int_2^5 f(x)dx$ bằng

A. 3. **B.** 7. **C.** 10. **D.** -3.

Lời giải

Ta có $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow 5=2+\int_2^5 f(x)dx \Rightarrow \int_2^5 f(x)dx=3.$

Câu 2: Cho khối chóp có thể tích $4a^3$ và diện tích đáy $4a^2$. Chiều cao của khối chóp đã cho bằng

A. a. **B.** $2a$. **C.** $3a$. **D.** $4a$.

Lời giải

Ta có $V=\frac{1}{3}h.S \Rightarrow \frac{1}{3}.h.4a^2=4a^3 \Rightarrow h=3a.$ **Chọn C.**

Câu 3: Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x$, trục Ox và các đường thẳng $x=0, x=\pi$ quay xung quanh Ox. Thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng

A. $\int_0^\pi \sin x\,dx.$ **B.** $\int_0^\pi \sin^2 x\,dx.$ **C.** $\pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx.$ **D.** $\pi\int_0^\pi \cos^2 x\,dx.$

Lời giải

Ta có $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx=\pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx.$ **Chọn C.**

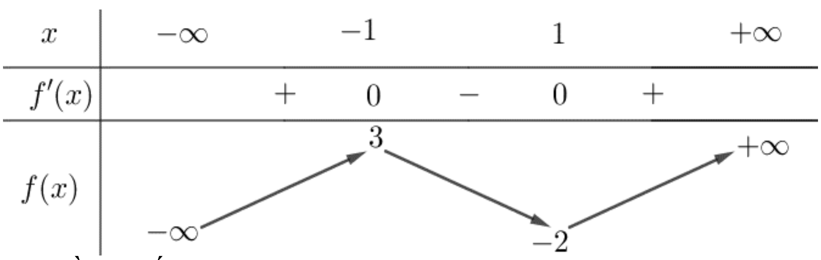
Câu 4: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x+\sin x$ là

A. $4-\cos x+C.$ **B.** $2x^2+\cos x+C.$ **C.** $2x^2-\cos x+C.$ **D.** $4+\cos x+C.$

Lời giải

Ta có $\int f(x)dx=\int(4x+\sin x)dx=2x^2-\cos x+C.$ **Chọn C.**

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-1;1)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz,$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-5=0.$ Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là

A. $(-2;4;-6).$ **B.** $(-1;2;-3).$ **C.** $(2;-4;6).$ **D.** $(1;-2;3).$

Lời giải

Ta có $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-5=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=3 \\ d=-5 \end{cases} \Rightarrow I(1;-2;3).$ **Chọn D.**

Câu 7: Trong không gian $Oxyz,$ cho $\vec{a}=(1;-2;3)$ và $\vec{b}=(-1;3;0)$. Vecto $\vec{a}-\vec{b}$ có tọa độ là

A. $(-2;5;-3).$ **B.** $(2;-5;3).$ **C.** $(0;1;3).$ **D.** $(2;-5;-3).$

Lời giải

Có $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=(1;-2;3)-(-1;3;0)=(2;-5;3).$ **Chọn B.**

Câu 8: Cho khối lăng trụ tam giác có chiều cao $h=3$ và đáy là tam giác đều cạnh $a=2.$ Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $3\sqrt{3}.$ **B.** $6\sqrt{3}.$ **C.** $6.$ **D.** $9\sqrt{3}.$

Lời giải

Ta có $V=h.S=3.\dfrac{2^2\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}.$ **Chọn A.**

Câu 9: Một cấp số cộng có hai số hạng liên tiếp là -6 và $4.$ Số hạng tiếp theo của cấp số cộng là

A. $-2.$ **B.** $10.$ **C.** $14.$ **D.** $2.$

Lời giải

Công sai: $d=4-(-6)=10.$ Do đó số hạng tiếp theo là $4+d=14.$ **Chọn C.**

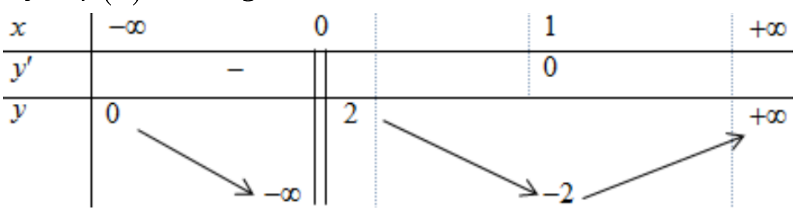
Câu 10: Cho hình trụ có bán kính đáy $r=3$ và độ dài đường sinh $l=5.$ Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $30\pi.$ **B.** $15\pi.$ **C.** $45\pi.$ **D.** $24\pi.$

Lời giải

Diện tích xung quanh của hình trụ $S_{xq}=2\pi rl=2\pi.3.5=30\pi.$ **Chọn A.**

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

A. $x=0.$ **B.** $y=2.$ **C.** $y=0.$ **D.** $y=-2.$

Câu 12: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5} x+2\geq 0$ là

A. $(-\infty;4].$ **B.** $(0;+\infty).$ **C.** $(0;4].$ **D.** $(0;4).$

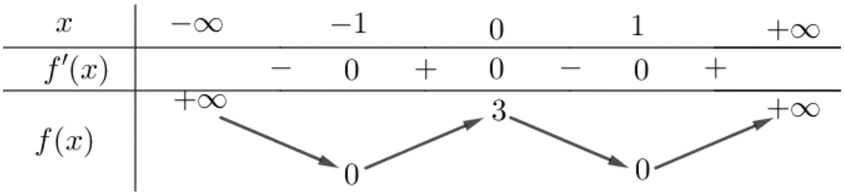
Lời giải

Điều kiện: $x>0.$

$\log_{0,5} x+2\geq 0 \Leftrightarrow \log_{0,5} x\geq -2 \Leftrightarrow x\leq 4$

Kết hợp điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $S=(0;4]$. **Chọn C.**

Câu 13: Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình sau



A. $y=3x^4-6x^2+3$. **B.** $y=-x^3+3x+3$. **C.** $y=x^4-2x^2+3$. **D.** $y=-x^4-2x^2+3$.

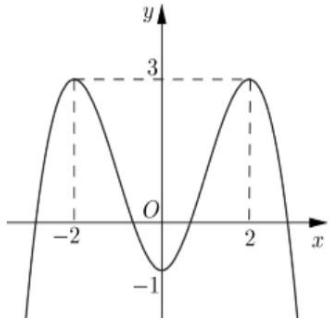
Câu 14. Cho số thực a thỏa mãn $a^3>a^{\pi}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0<a<1$. **B.** $a<1.$. **C.** $a>1$. **D.** $a=1$.

Lời giải

Ta có $a^3>a^{\pi}$ mà $3<\pi$ nên $0<a<1$. **Chọn A**

Câu 15: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $f\left(x\right)=m$ có hai nghiệm phân biệt là



A. 0. **B.** 1.
C. 2. **D.** 3.

Câu 16: Tập xác định của hàm số $y=\left(9-x^2\right)^{\frac{1}{3}}+\left(x-2\right)^{-2}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $D=\left(-3;2\right)\cup\left(2;3\right)$. **C.** $D=\left[-3;3\right]\setminus\{2\}$. **D.** $D=\left(-3;3\right)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases}9-x^2>0\\x-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<x<3\\x\neq 2\end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left(-3;2\right)\cup\left(2;3\right)$.

Câu 17: Với a,b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_3 b-2\log_9 a=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=27b$. **B.** $a=9b$. **C.** $a=8b$. **D.** $b=9a$.

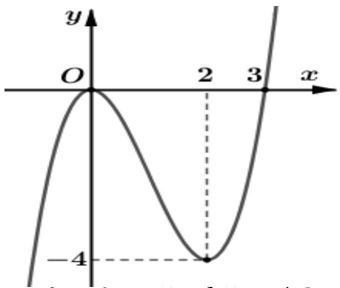
Lời giải

Ta có: $2\log_9 a-\log_3 b=3\Leftrightarrow\log_3 a-\log_3 b=3\Leftrightarrow\log_3\frac{a}{b}=3\Leftrightarrow\frac{a}{b}=27\Leftrightarrow a=9b$. . **Chọn D.**

Câu 18: Một họa sĩ cần trưng bày 10 bức tranh nghệ thuật khác nhau thành một hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách để họa sĩ sắp xếp các bức tranh?

A. 10. **B.** 10!. **C.** 10^{10}. **D.** 100.

Câu 19: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong như như hình vẽ bên. Điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho là



A. $x=0$. **B.** $x=2$.
C. $\left(0;0\right)$. **D.** $\left(2;-4\right)$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\left(Oxy\right)$?

A. $\vec{i}=\left(1;0;0\right)$. **B.** $\vec{j}=\left(0;1;0\right)$. **C.** $\vec{k}=\left(0;0;1\right)$. **D.** $\vec{n}=\left(1;1;1\right)$.

Câu 21: Nghiệm của phương trình $2^{1-3x}=\frac{1}{32}$ là

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=\frac{1}{3}$. **D.** $x=-\frac{4}{3}$.

Lời giải

Ta có $2^{1-3x}=\dfrac{1}{32}\Leftrightarrow 2^{1-3x}=2^{-5}\Leftrightarrow 1-3x=-5\Leftrightarrow x=2.$ **Chọn A**

Câu 22: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số $y=f\left(x\right)+1$ bằng

A. 3. **B.** -2. **C.** -1. **D.** 0.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(1;-2;5\right)$ và $B\left(-2;-2;1\right)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. 25. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{53}$. **D.** 5.

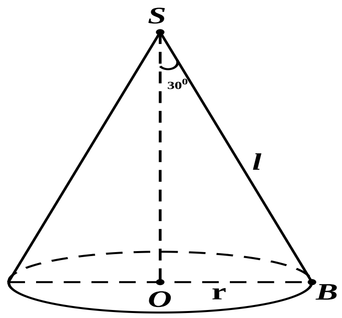
Lời giải

Ta có $AB=\sqrt{\left(-3\right)^2+\left(-4\right)^2}=5.$ **Chọn D**

Câu 24: Cho khối nón có bán kính đáy $r=3$ và góc ở đỉnh bằng $60°$. Thể tích của khối nón giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $9\sqrt{3}$. **B.** $27\sqrt{3}\pi$. **C.** 27π. **D.** $9\sqrt{3}\pi$.

Lời giải

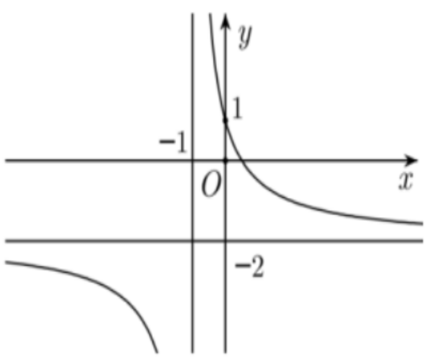


Ta có góc ở đỉnh bằng $60^0\Rightarrow OSB=30^0$.

Độ dài đường sinh: $h=\dfrac{r}{\tan 30^0}=3\sqrt{3}.$

Vậy thể tích của khối nón đã cho là $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi.3^2.3\sqrt{3}=9\sqrt{3}.$ **Chọn D**

Câu 25: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?



A. $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}$. **B.** $y=-x^3+x+1$.

C. $y=\dfrac{-2x-1}{x+1}$ **D.** $y=-x^4+2x^2+1$.

Câu 26: Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3\left[2+f(x)\right]dx$ bằng

A. 14. **B.** 12. **C.** $\frac{38}{3}$. **D.** 11.

Lời giải

Ta có: $\int_1^3\left[2+f(x)\right]dx=\left(2x+x^2\right)\Big|_1^3=12$. **Chọn B**

Câu 27: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int\sin(x-1)dx=-\cos(x-1)+C$. **B.** $\int 3^x dx=3^x\ln 3+C$.

C. $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$. **D.** $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C$.

Câu 28: Đạo hàm của hàm số $y=\log_3(3x+1)$ là

A. $y'=\frac{1}{(3x+1)\ln 3}$. **B.** $y'=\frac{3}{(3x+1)\ln 3}$. **C.** $y'=\frac{3}{3x+1}$. **D.** $y'=\frac{1}{3x+1}$.

Lời giải

Ta có $y'=\left(\log_3(3x+1)\right)'=\frac{(3x+1)'}{(3x+1)\ln 3}=\frac{3}{(3x+1)\ln 3}$. **Chọn B**

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;0;1)$ và $B(-2;2;-3)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $2x-y+z+6=0$. **B.** $y-2z+3=0$. **C.** $y-2z-3=0$. **D.** $2x-y+z-6=0$.

Lời giải

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(0;2;-4)=2(0;1;-2)$ và đi qua trung điểm $I(-2;1;-1)$ của đoạn thẳng AB.

Do đó, phương trình mặt phẳng đó là: $0(x+2)+1(y-1)-2(z+1)=0\Leftrightarrow y-2z-3=0$. **Chọn C**

Câu 30: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-6x$ trên đoạn $[-1;4]$ là

A. $-4\sqrt{2}$. **B.** -5. **C.** 5. **D.** 40.

Lời giải

Ta có: $f(x)=x^3-6x\Rightarrow f'(x)=3x^2-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\,(tm)\\ x=-\sqrt{2}\,(l)\end{array}\right.$.

$f(-1)=5;\ f\left(\sqrt{2}\right)=-4\sqrt{2};\ f(4)=40\Rightarrow\min\limits_{[-1;4]}f(x)=f\left(\sqrt{2}\right)=-4\sqrt{2}$. **Chọn A**

Câu 31: Năm 2023 một hãng xe niêm yết giá bán loại xe X là 750.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2030 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu? *(kết quả làm tròn đến hàng nghìn)*

A. 677.941.000 đồng. **B.** 638.072.000 đồng.

C. 664.382.000 đồng. **D.** 651.094.000 đồng.

Lời giải

Giá xe năm 2023 là A

Giá xe năm 2024 là $A_1=A-A.r=A(1-r)$.

Giá xe năm 2025 là $A_2 = A_1 - A_1.r = A(1-r)^2$.

Giá xe năm 2026 là $A_3 = A_2 - A_2.r = A(1-r)^3$.

……

Giá xe năm 2030 là $A_7 = A_6 - A_6.r = A(1-r)^7 = 750.000.000(1-2\%)^7 \approx 651.094.000$ đồng.

Câu 32: Số nghiệm của phương trình $\log_3\left(x^2+4x\right)+\log_{\frac{1}{3}}(3x+6)=0$ là

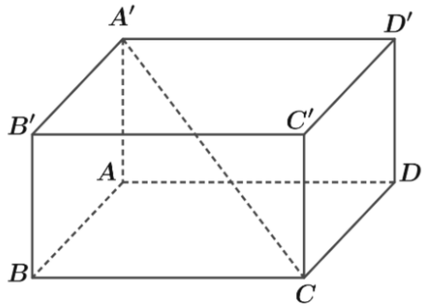
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Viết lại phương trình ta được

$$\log_3\left(x^2+4x\right)=\log_3(3x+6) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+6>0 \\ x^2+4x=3x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x^2+x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Câu 33: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA'=AD=a$, $AB=a\sqrt{2}$ *(tham khảo hình vẽ)*. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng



A. 30^0. **B.** 45°.

C. 90°. **D.** 60°.

Lời giải

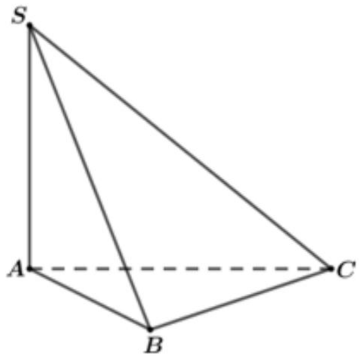
Vì $ABB'A'$ là hình chữ nhật, có $AA'=a$, $AB=a\sqrt{2}$ nên

$$A'B=\sqrt{AA'^2+AB^2}=\sqrt{a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=a\sqrt{3}$$

Ta có $BC\perp(ABB'A') \Rightarrow (A'C;(ABB'A'))=(A'C;A'B)=BA'C$

Do tam giác $BA'C$ vuông tại B nên $\tan BA'C=\dfrac{BC}{A'B}=\dfrac{a}{a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow BA'C=30^\circ$. **Chọn A**

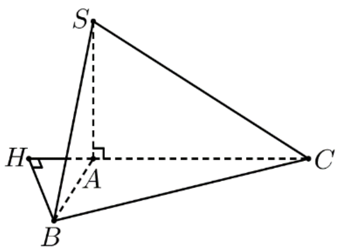
Câu 34: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC có $AB=a,\ AC=2a,\ BAC=120^\circ$ *(tham khảo hình vẽ)*. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng



A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Kẻ $BH\perp AC\ (H\in AC)$. (1)

Lại có $SA \perp BH$ (vì $SA \perp (ABC)$). $\quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $BH \perp (SAC)$ nên $d\left[B,(SAC)\right] = BH$.

Ta có $BAC = 120° \Rightarrow BAH = 60°$. Tam giác vuông ABH, có $BH = AB.\sin BAH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = x.\cos 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = \dfrac{1}{4}$. Hàm số $f(x)$ là

A. $\dfrac{1}{2}x\sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x.$ **B.** $\dfrac{1}{2}x\sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x + \dfrac{1}{4}.$

C. $-\dfrac{1}{2}x\sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x.$ **D.** $-\dfrac{1}{2}x\sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x + \dfrac{1}{4}.$

Lời giải

Ta có

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int x.\cos 2x dx = \frac{1}{2}\int x d(\sin 2x)$$

$$= \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Mà $f(0) = \dfrac{1}{4} \Rightarrow C = 0.$

Vậy $f(x) = \dfrac{1}{2}x\sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x.$

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x + 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. Mặt phẳng (Q) đi qua A, B và vuông góc với (P) có phương trình dạng $ax + by + cz + 11 = 0$. Tổng $a + b + c$ bằng

A. -5. **B.** 5. **C.** -20. **D.** 20.

Lời giải

Ta có: $A\ 2;4;1\ ,\ B\ -1;1;3\ \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \ -3;-3;2\ .$

Véc tơ pháp tuyến của P là: $\vec{n} = \ 1;-3;2\ .$

Do mặt phẳng Q đi qua AB và vuông góc với P nên Q nhận véc tơ $\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}\right] = \ 0;-8;-12$ làm một véc tơ pháp tuyến nên phương trình của Q là: $2\ y-4\ +3\ z-1\ = 0 \Leftrightarrow 2y + 3z - 11 = 0 \Leftrightarrow -2y - 3y + 11 = 0.$

Suy ra $a = 0$, $b = -2$, $c = -3 \Rightarrow a + b + c = -5$.

Câu 38: Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ít nhất 3 chữ số và các chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $1,2,3,4,5$. Chọn ngẫu nhiên hai số từ S, tính xác xuất để hai số chọn được đều là số có ba chữ số.

A. $\dfrac{238}{1495}$. **B.** $\dfrac{59}{1495}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{267}{2990}$.

Lời giải.

Ta tính số phần tử thuộc tập S như sau:

Số các số thuộc S có 3 chữ số khác nhau là $A_5^3 = 60$ số.

Số các số thuộc S có 4 chữ số khác nhau là $A_5^4 = 120$ số.

Số các số thuộc S có 5 chữ số khác nhau là $A_5^5 = 120$ số.

Suy ra số phần tử của tập S là $n(S) = 300$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 2 số từ tập $S \Rightarrow n(\Omega) = C_{300}^2$.

Gọi X là biến cố " Hai số được chọn đều là số có ba chữ số ".

Suy ra số phần tử của biến cố X là $n(X) = C_{60}^2$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \dfrac{C_{60}^2}{C_{300}^2} = \dfrac{59}{1495}$. **Chọn B.**

Câu 39: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(x-1).\log\left(e^{-x} + m + 2023\right) = x - 2$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 2023. **B.** 2024. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải.

Điều kiện: $e^{-x} + m + 2023 > 0$ (*).

Vì $x = 1$ không là nghiệm nên phương trình nên:

Với $x \neq 1$, $\log(e^{-x} + m + 2023) = \dfrac{x-2}{x-1} \Leftrightarrow e^{-x} + m + 2023 = 10^{\frac{x-2}{x-1}} > 0$ (thỏa mãn (*))

$\Leftrightarrow m + 2023 = 10^{\frac{x-2}{x-1}} - e^{-x}$.

Đặt $y = g(x) = 10^{\frac{x-2}{x-1}} - e^{-x}$

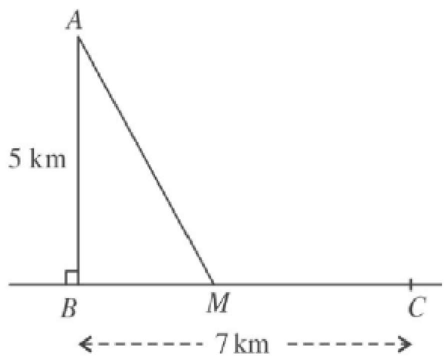
Ta có: $y' = \dfrac{1}{(x-1)^2} 10^{\frac{x-2}{x-1}} \ln 10 + e^{-x} > 0, \forall x \neq 1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\frac{1}{e}$	↗	10

Vậy phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt khi $-\dfrac{1}{e} < m + 2023 < 10$. **Chọn D.**

Câu 40: Một ngọn hải đăng được đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5km$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng $BC = 7km$ *(tham khảo hình vẽ).* Người canh hải đăng có thể chèo đò từ vị trí A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc $4km/h$ và đi bộ đến kho C với vận tốc $6km/h$. Hỏi muộn nhất mấy giờ người đó phải xuất phát từ vị trí A để có mặt ở kho C lúc 7 giờ sáng?



A. 4h 54 phút. **B.** 4h 55 phút.

C. 4h 53 phút. **D.** 5h 02 phút.

Lời giải

Đặt $BM = x(km)$, điều kiện $0 \le x \le 7$.

Ta có $AM = \sqrt{25+x^2} \Rightarrow$ thời gian người đó đi từ A đến M là $t_1 = \dfrac{AM}{4} = \dfrac{\sqrt{25+x^2}}{4}$ (h)

Ta có $MC = 7-x \Rightarrow$ thời gian người đó đi từ M đến C là $t_2 = \dfrac{MC}{6} = \dfrac{7-x}{6}$ (h)

Tổng thời gian người đó đi từ A đến C là $t = t_1 + t_2 = \dfrac{\sqrt{25+x^2}}{4} + \dfrac{7-x}{6}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{25+x^2}}{4} + \dfrac{7-x}{6}$ với $0 \le x \le 7$.

Tính được min $f(x) = \dfrac{14+5\sqrt{5}}{12}(h) \approx 126$ (phút) khi $x = 2\sqrt{5}$. **Chọn A.**

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $x^2 f(x^5) + xf(1-x^4) = -3x^4 + x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{23}{28}$. **B.** $\dfrac{207}{560}$. **C.** $-\dfrac{115}{7}$. **D.** $\dfrac{115}{63}$.

Lời giải

Với $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có : $x^2 f(x^5) + xf(1-x^4) = -3x^4 + x + 3$

$x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên nhân 2 vế của phương trình với x^2 ta được

$x^4 f(x^5) + x^3 f(1-x^4) = x^2(-3x^4 + x + 3)$

$\Rightarrow \int_0^1 x^4 f(x^5)\mathrm{d}x + \int_0^1 x^3 f(1-x^4)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2(-3x^4+x+3)\mathrm{d}x$

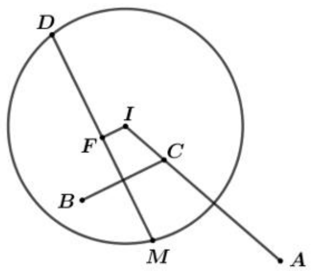
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{5}\int_0^1 f(x^5)\mathrm{d}(x^5) - \dfrac{1}{4}\int_0^1 f(1-x^4)\mathrm{d}(1-x^4) = \dfrac{23}{28}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{5}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \dfrac{1}{4}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{23}{28} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{115}{63}$. **Chọn D.**

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 8$ và hai điểm $A(4;-4;3)$, $B(1;-1;7)$. Gọi (C_1) là tập hợp các điểm $M \in (S)$ sao cho biểu thức $|MA - 2MB|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết (C_1) là một đường tròn, bán kính của đường tròn đó là

A. 2. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải



Mặt cầu S có tâm $I\ \ 0;0;3$ và bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Gọi C là điểm trên đoạn IA thỏa mãn $IC=\frac{1}{4}IA \longrightarrow C\ \ 1;-1;3$.

Xét ΔIAM và ΔIMC, ta có

$$\begin{cases} \hat{I} \text{ chung} \\ \dfrac{IA}{IM}=\dfrac{IM}{IC}=2 \end{cases} \Rightarrow \Delta IAM \backsim \Delta IMC \longrightarrow MA=2MC.$$

$\Rightarrow P=|MA-2MB|=2|MC-MB|\geq 0.$

Dấu "$=$" xảy ra khi M nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn BC.

Mặt phẳng trung trực P của đoạn thẳng BC có phương trình là $z-5=0$.

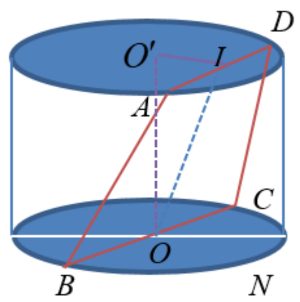
Ta có $h=d\ \ I,\ P\ \ =2$.

Khi đó M nằm trên đường tròn có bán kính $R_1=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{8-4}=2$. **Chọn A.**

Câu 43: Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn tâm O và O', chiều cao $h=a\sqrt{3}$. Mặt phẳng đi qua tâm O và tạo với OO' một góc $30°$, cắt hai đường tròn tâm O và O' tại bốn điểm là bốn đỉnh của một hình thang có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ và diện tích bằng $3a^2$. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\pi a^3\sqrt{3}.$ **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}.$ **D.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$

Lời giải



Giả sử $ABCD$ là hình thang mà đề bài đề cập (BC đáy lớn, AD đáy nhỏ) và r là bán kính đáy của hình trụ.

Theo đề: $\begin{cases} BC=2r \\ BC=2AD \end{cases} \Rightarrow AD=r$

Kẻ $O'I\perp AD \Rightarrow AD\perp (OO'I)\Rightarrow (ABCD)\perp (OO'I)$

Suy ra góc giữa OO' và $(ABCD)$ là góc $O'OI$. Theo đề $O'OI=30°$

$$\cos O'OI=\frac{OO'}{OI}\Leftrightarrow OI=\frac{OO'}{\cos 30°}=\frac{a\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2a\,.$$

Ta có: $S_{ABCD}=\dfrac{(AD+BC).IO}{2}\Leftrightarrow 3a^2=\dfrac{(r+2r).2a}{2}\Leftrightarrow r=a$.

Thể tích của khối trụ là $V=\pi r^2h=\pi a^2.a\sqrt{3}=\pi a^3\sqrt{3}$. **Chọn B.**

Câu 44: Xét các số thực x,y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét $x^2+y^2-2x+2>0\forall x;y$

Bất phương trình $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x\Leftrightarrow\dfrac{2^{x^2+y^2+1}}{2^{2x}}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)$

$\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)$.

Đặt $t=x^2+y^2-2x+1$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^t\le t+1\Leftrightarrow 2^t-t-1\le 0$

Đặt $f(t)=2^t-t-1$. Ta thấy $f(0)=f(1)=0$.

Ta có $f'(t)=2^t\ln 2-1$

$f'(t)=0\Leftrightarrow 2^t\ln 2=1\Leftrightarrow t=\log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)\approx 0,52$

t	$-\infty$		0		$\log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)$		1		$+\infty$
$f'(t)$			$-$		0		$+$		
$f(t)$		↘	0	↘		↗	0	↗	

Quan sát BBT ta thấy $f(t)\le 0\Leftrightarrow 0\le t\le 1$

$\Rightarrow 0\le x^2+y^2-2x+1\le 1\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2\le 1\ (1)$

Khi đó tập hợp các điểm $M(x;y)$ là một hình tròn (S) tâm $I(1;0)$, bán kính $R=1$.

Xét $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}\Leftrightarrow(2P-8)x-Py+P-4=0$

Khi đó ta cũng có tập hợp các điểm $M(x;y)$ là một đường thẳng $\Delta:(2P-8)x-Py+P-4=0$.

Để Δ và (S) có điểm chung, ta suy ra $d(I,\Delta)\le 1$.

$\Leftrightarrow\dfrac{|2P-8+P-4|}{\sqrt{(2P-8)^2+P^2}}\le 1\Leftrightarrow|3P-12|\le\sqrt{5P^2-32P+64}$

$\Leftrightarrow 4P^2-40P+80\le 0\Leftrightarrow 5-\sqrt{5}\le P\le 5+\sqrt{5}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $5+\sqrt{5}\approx 7,23$ khi $\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{cases}$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;8]$ và thỏa mãn

$$\int_1^2\left[f\left(x^3\right)\right]^2dx+2\int_1^2 f\left(x^3\right)dx-\frac{4}{3}\int_1^8 f(x)dx=-\frac{247}{15}.$$

Giả sử $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[1;8\right]$. Tích phân $\int\limits_1^8 xF'\left(x\right)dx$ bằng

A. $\dfrac{257\ln 2}{2}$. **B.** $\dfrac{257\ln 2}{4}$. **C.** 160. **D.** $\dfrac{639}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Nhận thấy có một tích phân khác cận là $\int\limits_1^8 f\left(x\right)dx$. Bằng cách đặt $x=t^3$ ta thu được tích phân

$$\int\limits_1^8 f\left(x\right)dx=3\int\limits_1^2 t^2 f\left(t^3\right)dt=3\int\limits_1^2 x^2 f\left(x^3\right)dx.$$

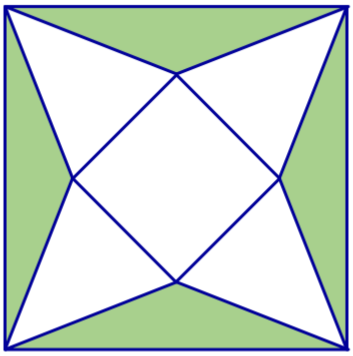
Do đó giả thiết được viết lại là $\int\limits_1^2\left[f\left(x^3\right)\right]^2dx+2\int\limits_1^2 f\left(x^3\right)dx-4\int\limits_1^2 x^2f\left(x^3\right)dx=-\dfrac{247}{15}$. (*)

$$\Leftrightarrow\int\limits_1^2\left[f\left(x^3\right)-2x^2+1\right]^2dx=-\frac{247}{15}+\int\limits_1^2\left(1-2x^2\right)^2dx=0$$

$$\Rightarrow f\left(x^3\right)=2x^2-1,\forall x\in\left[1;2\right]\to f\left(x\right)=2\sqrt[3]{x^2}-1,\forall x\in\left[1;8\right].$$

$$\Rightarrow\int\limits_1^8 xF'\left(x\right)dx=\int\limits_1^8 xf\left(x\right)dx=\int\limits_1^8 x\left(2\sqrt[3]{x^2}-1\right)dx=\frac{639}{4}.$$ **Chọn D**

Câu 46: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $1\left(m\right)$ như hình vẽ bên.

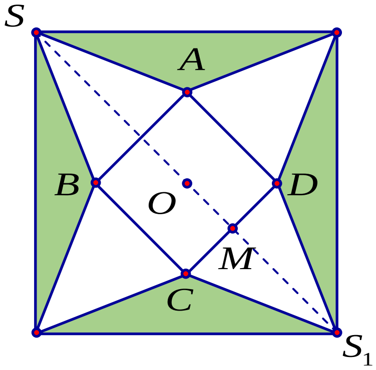


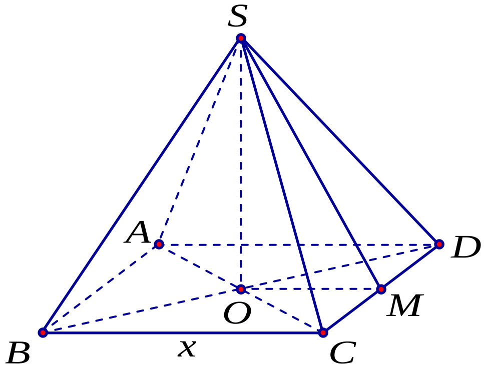
Người ta cắt phần tô đậm của tấm nhôm rồi gập thành một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $x\left(m\right)$ sao cho bốn đỉnh của hình vuông gập lại thành đỉnh của hình chóp. Giá trị của x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất là

A. $x=\dfrac{1}{2}$. **B.** $x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

C. $x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $x=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

Lời giải





Từ hình vuông ban đầu ta tính được $OM=\dfrac{x}{2}, S_1M=S_1O-OM=\dfrac{\sqrt{2}-x}{2}$. $\left(0<x<\sqrt{2}\right)$

Khi gấp thành hình chóp $S.ABCD$ thì $S_1\equiv S$ nên ta có $SM=S_1M$.

Từ đó $SO=\sqrt{SM^2-OM^2}=\dfrac{\sqrt{2-2\sqrt{2}x}}{2}$. (Điều kiện $0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$)

Thể tích khối chóp $S.ABCD$: $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO=\dfrac{1}{6}x^2\sqrt{2-2\sqrt{2}x}=\dfrac{1}{6}\sqrt{2x^4-2\sqrt{2}x^5}$.

Ta thấy V_{SABCD} lớn nhất khi $f(x)=2x^4-2\sqrt{2}x^5,\ 0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ đạt giá trị lớn nhất

Ta có $f'(x)=8x^3-10\sqrt{2}x^4=2x^3\left(4-5\sqrt{2}x\right)$

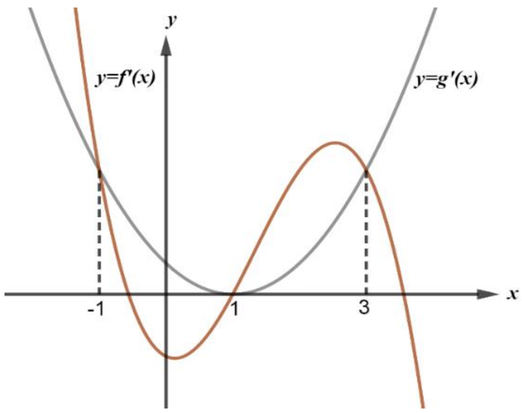
$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f_{\max}$	$\searrow$	

Vậy: $V_{S.ABCD}$ lớn nhất khi và chỉ khi $x=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$. **Chọn D.**

Câu 47: Cho hàm số bậc bốn $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\,(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$ và hàm số bậc ba $g(x)=mx^3+nx^2+px+q\,(m,n,p,q\in\mathbb{R})$ có đồ thị $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng 96 và $f(2)=g(2)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x),y=g(x)$ và $x=0,\ x=2$ bằng

A. $\dfrac{136}{15}$. **B.** $\dfrac{272}{15}$. **C.** $\dfrac{136}{5}$. **D.** $\dfrac{68}{15}$.

Lời giải

Đồ thị các hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ là $-1;1;3$

Khi và chỉ khi PT $f'(x)-g'(x)=0$ có ba nghiệm là $-1;1;3$

$\Rightarrow f'(x)-g'(x)=k(x+1)(x-1)(x-3)=k\left(x^3-3x^2-x+3\right)$ với $k\neq 0$.

$$\Rightarrow f(x)-g(x)=\int\left(f'(x)-g'(x)\right)dx=\int k\left(x^3-3x^2-x+3\right)dx=k\left(\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{x^2}{2}+3x+C\right).$$

Mà $f(2)=g(2)\Leftrightarrow f(2)-g(2)=0\Rightarrow kC=0\Rightarrow C=0$

Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có diện tích bằng 96.

$$\Rightarrow 96=-\int_{-1}^{1}\left(f'(x)-g'(x)\right)dx+\int_{1}^{3}\left(f'(x)-g'(x)\right)dx$$

$$\Rightarrow 96=-k\int_{-1}^{1}\left(x^3-3x^2-x+3\right)dx+k\int_{1}^{3}\left(x^3-3x^2-x+3\right)dx=-8k\Rightarrow k=-12$$

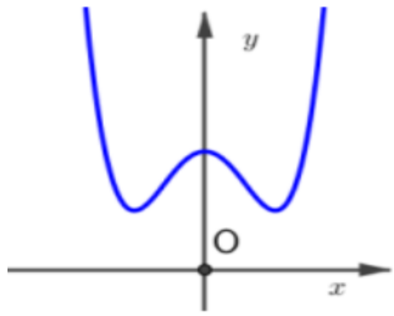
$$\Rightarrow f(x)-g(x)=-3x^4+12x^3+6x^2-36x$$

PT $f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow -3x^4+12x^3+6x^2-36x=0$ không có nghiệm trong khoảng $(0;2)$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=0, x=2$, $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là

$$S=\int_0^2\left|-3x^4+12x^3+6x^2-36x\right|dx=\left|\int_0^2\left(-3x^4+12x^3+6x^2-36x\right)dx\right|=\frac{136}{5}.$$

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ biết hàm số $y=f''(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có đồ thị như hình vẽ bên.



Đặt $g(x)=2f\left(\frac{1}{2}x^2\right)+f\left(-x^2+6\right)$, biết rằng $g(0)>0$ và $g(2)<0$. Số điểm cực tiểu của hàm số $y=\left|g(x)\right|$ là

A. 3. **B.** 4.
C. 5. **D.** 7.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số $y=f''(x)$ ta có $f''(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số $y=f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$g'(x)=2x.f'\left(\frac{1}{2}x^2\right)-2x.f'\left(-x^2+6\right)=2x\left[f'\left(\frac{1}{2}x^2\right)-f'\left(-x^2+6\right)\right].$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=0\\ f'\left(\frac{1}{2}x^2\right)=f'\left(-x^2+6\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \frac{1}{2}x^2=-x^2+6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\\ x=2\end{array}\right..$$

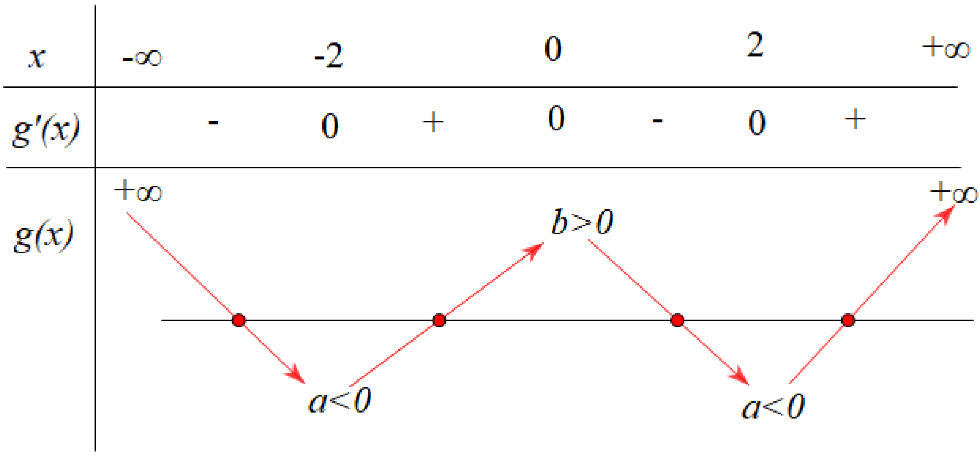
(do hàm số $y=f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$)

Xét $g'(x)>0 \Leftrightarrow 2x\left[f'\left(\frac{1}{2}x^2\right)-f'\left(-x^2+6\right)\right]>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ \frac{1}{2}x^2>-x^2+6\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \frac{1}{2}x^2<-x^2+6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>2\\ -2<x<0\end{array}\right.$.

Suy ra $g'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-2\\ 0<x<2\end{array}\right.$.

Vì $g(x)=2f\left(\frac{1}{2}x^2\right)+f\left(-x^2+6\right)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ và có $g(2)<0$ nên $g(-2)=g(2)=a<0,\ g(0)=b>0$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:



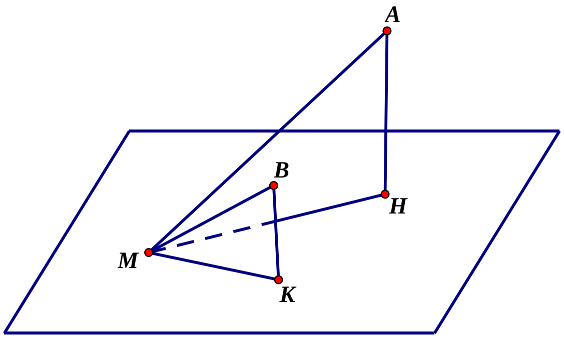
Vậy hàm số $y=|g(x)|$ có 4 điểm cực tiểu. **Chọn B.**

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-10;6;-2), B(-5;10;-9)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y-z+12=0$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (α) sao cho MA, MB tạo với (α) các góc bằng nhau và biểu thức $T=2MA^2-MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b+c$ bằng

A. $-\frac{464+4\sqrt{58}}{29}$. **B.** -6. **C.** 6. **D.** $\frac{464-4\sqrt{58}}{29}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên mặt phẳng (α), khi đó:

$$AH=d\left(A;(\alpha)\right)=\frac{|2.(-10)-2.6-(-2)+12|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=6;$$

$BK = d\left(B;(\alpha)\right) = \dfrac{\left|2.(-5)-2.10-(-9)+12\right|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = 3$.

Vì MA, MB tạo với (α) các góc bằng nhau nên $AMH = BMK$. Từ $AH = 2BK$ suy ra $MA = 2MB$.

Ta có: $MA = 2MB \Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2$

$\Leftrightarrow (a+10)^2+(b-6)^2+(c+2)^2 = 4\left[(a+5)^2+(b-10)^2+(c+9)^2\right]$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+\dfrac{20}{3}a-\dfrac{68}{3}b+\dfrac{68}{3}c+228=0$.

Như vậy, điểm M nằm trên mặt cầu (S) có tâm $I\left(-\dfrac{10}{3};\dfrac{34}{3};-\dfrac{34}{3}\right)$ và bán kính $R = 2\sqrt{10}$.

Mà M thuộc (α)

Do đó, M thuộc đường tròn (C) là giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α), nên tâm J của đường tròn (C) là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (α).

Tìm được $J = (-2;10;-12)$ và bán kính (C) là $r = \sqrt{R^2 - IJ^2} = 6$

Gọi điểm E thỏa mãn $2\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EB}=\vec{0} \Rightarrow E(-15;2;5)$.

Khi đó $T = 2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)^2 = ME^2+2EA^2-EB^2$ và $2EA^2-EB^2$ không đổi.

Vậy $T_{\min} \Leftrightarrow ME_{\min}$

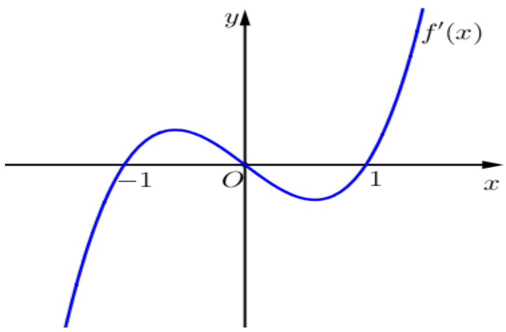
Gọi F là hình chiếu của E trên (α), tìm được $F(-9;-4;2) \Rightarrow FJ = 21 > r$ nên F nằm ngoài (C).

Suy ra $FM_{\min} = FJ - r = 15$.

Khi đó $ME_{\min} = \sqrt{EF^2+FM_{\min}^2} = 3\sqrt{34}$ khi M là giao điểm của FJ và (C), M nằm giữa F, J

$\Rightarrow \overrightarrow{FM} = \dfrac{15}{21}\overrightarrow{FJ} = \dfrac{5}{7}\overrightarrow{FJ} \Rightarrow M(-4;6;-8) \Rightarrow a+b+c=-6$.

Câu 50: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ thỏa mãn $f(0) = 3f(2) = -3$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-20;20)$ để hàm số $g(x) = f\left[4f(x) - f''(x) + m\right]$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 30. **B.** 29. **C.** 0. **D.** 10.

Lời giải

Xét $y = f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \Rightarrow f'(x) = 4ax^3+3bx^2+2cx+d$.

Từ đồ thị $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = 4ax(x^2-1) = 4ax^3-4ax$.

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} b=0 \\ 2c=-4a \\ d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=-2a \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=ax^4-2ax^2+e$.

Ta lại có $f(0)=3f(2)=-3 \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ e=-3 \end{cases}$.

Vậy $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{2}x^2-3.$

Ta có $f'(x)=x^3-x \Rightarrow f''(x)=3x^2-1 \Rightarrow f'''(x)=6x$

Xét hàm số $g(x)=f(2f(x)-f''(x)+m)$ trên đoạn $[0;1]$

Ta có $g'(x)=\left[4f'(x)-f'''(x)\right]f'\left[4f(x)-f''(x)+m\right]$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ $\Leftrightarrow g'(x)\ge 0, \forall x\in(0;1)$.

Mà $4f'(x)-f'''(x)<0, \forall x\in(0;1)$ và $4f(x)-f''(x)+m=x^4-5x^2+m-11$

Nên $g'(x)\ge 0, \forall x\in(0;1)$

$\Leftrightarrow f'\left[4f(x)-f''(x)+m\right]\le 0, \forall x\in(0;1) \Leftrightarrow f'\left(x^4-5x^2+m-11\right)\le 0, \forall x\in(0;1)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4-5x^2+m-11\le -1, \forall x\in(0;1) \\ 0\le x^4-5x^2+m-11\le 1, \forall x\in(0;1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-10\le -x^4+5x^2, \forall x\in(0;1) \\ \begin{cases} m-11\ge -x^4+5x^2, \forall x\in(0;1) \\ m-12\le -x^4+5x^2, \forall x\in(0;1) \end{cases} \end{array}\right. \quad (*)$

Xét hàm số $h(x)=-x^4+5x^2$ trên $[0;1]$

Tìm được $\min\limits_{[0;1]} h(x)=0,\ \max\limits_{[0;1]} h(x)=4.$

Do đó $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-10\le 0 \\ \begin{cases} m-11\ge 4 \\ m-12\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 10 \\ \begin{cases} m\ge 15 \\ m\le 12 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m\le 10.$

m nguyên thuộc khoảng $(-20;20) \Rightarrow m\in\{-19,...,10\}$

$\Rightarrow$ có 30 giá trị nguyên của m**.**

---------------------**HẾT**--------------------