

BÀI I. (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+5}$ và $B = \frac{4}{\sqrt{x}+3} + \frac{2x-\sqrt{x}-13}{x-9} + \frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$; $x \neq 9$.

- 1) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 16$
- 2) Rút gọn biểu thức $P = B.A$
- 3) Tìm các giá trị của x thỏa mãn $x-1 = (\sqrt{x}+3).P + 2\sqrt{x+3}$

BÀI II. (2,5 điểm)

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình:*

Một đội xe theo kế hoạch phải chuyển xong 200 tấn than trong một thời gian quy định, mỗi ngày chuyển được một khối lượng than như nhau. Nhờ bổ sung thêm xe, thực tế mỗi ngày đội chuyển thêm được 5 tấn so với kế hoạch. Vì vậy chẳng những đã hoàn thành công việc sớm hơn 1 ngày so với quy định mà còn chuyển vượt mức kế hoạch 25 tấn. Tính khối lượng than mà đội xe phải chuyển trong một ngày theo kế hoạch.

2) Một hộp sữa hình trụ có bán kính đáy là 3,5 cm và chiều cao là 8 cm. Người ta dùng giấy làm bao bì xung quanh hộp sữa (trừ hai đáy). Tính diện tích giấy để làm bao bì (lấy $\pi \approx 3,14$).

BÀI III. (2,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{4}{\sqrt{x}-3} + \frac{1}{|2y-1|} = 5 \\ \frac{1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2}{|2y-1|} = 3 \end{cases}$$

2) Cho phương trình $x^2 - (m+1)x + m - 1 = 0$ (1)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 1$

BÀI IV. (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB, MN vuông góc với nhau. Trên tia đối của tia MA lấy điểm C. Kẻ MH vuông góc với BC (H thuộc BC).

1) Chứng minh tứ giác BOMH nội tiếp được đường tròn.

2) Gọi E là giao điểm của MB và OH. Chứng minh HO là tia phân giác của góc MHB và $ME.MH = BE.HC$.

3) Gọi giao điểm của đường tròn (O) với đường tròn ngoại tiếp tam giác MHC là K. Chứng minh ba điểm C, K, E thẳng hàng.

BÀI V. (0,5 điểm) Cho $x; y; z > 0$ và $xyz = 1$. Chứng minh: $\frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \geq \frac{3}{2}$

-----Hết-----

HƯỚNG DẪN CHẤM

BÀI	NỘI DUNG	ĐIỂM
Bài I (2,0đ)	1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$ Thay $x=16$ (thỏa mãn ĐKXD) vào biểu thức A Tính được $A = \frac{1}{9}$	0,25 0,25
	2) Rút gọn biểu thức B $B = \frac{4}{\sqrt{x}+3} + \frac{2x-\sqrt{x}-13}{x-9} + \frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$ $B = \frac{4}{\sqrt{x}+3} + \frac{2x-\sqrt{x}-13}{x-9} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$ $B = \frac{4\sqrt{x}-12+2x-\sqrt{x}-13-x-3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$	0,25
	$B = \frac{x-25}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$	0,25
	$P = B.A = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$ Kết luận	0,50
	3) $x-1 = (\sqrt{x}+3).P + 2\sqrt{x+3}$ ($x \geq 0$; $x \neq 9$) $\Leftrightarrow x-1 = \sqrt{x}-5 + 2\sqrt{x+3}$ $\Leftrightarrow x+4 - \sqrt{x} - 2\sqrt{x+3} = 0$ $\Leftrightarrow 2x+8 - 2\sqrt{x} - 4\sqrt{x+3} = 0$ $\Leftrightarrow (x+3 - 4\sqrt{x+3} + 4) + (x - 2\sqrt{x} + 1) = 0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 2)^2 + (\sqrt{x} - 1)^2 = 0$ Giải ra tìm được $x=1$ (thỏa mãn ĐKXD), $x=-4$ (loại)	0,25 0,25
Bài II (2,5đ)	1) Gọi khối lượng than mà đội xe phải chuyển trong 1 ngày theo kế hoạch là x (tấn; $0 < x < 200$)	0,25
	Thời gian đội xe vận chuyển theo kế hoạch là $\frac{200}{x}$ (ngày)	0,25
	Thực tế mỗi ngày chuyển được $x+5$ (tấn)	0,25
	Thời gian đội xe vận chuyển theo thực tế là $\frac{225}{x+5}$ (ngày)	0,25
	Theo đề ta có phương trình: $\frac{225}{x+5} + 1 = \frac{200}{x}$	0,25
	Giải được phương trình đúng ra $x=20$ (thỏa mãn ĐK của ẩn) Kết luận đúng	0,50 0,25
	2) Viết đúng công thức diện tích xung quanh Tính đúng diện tích xung quanh	0,25 0,25

Bài III (2,0đ)	1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{4}{\sqrt{x-3}} + \frac{1}{ 2y-1 } = 5 \\ \frac{1}{\sqrt{x-3}} + \frac{2}{ 2y-1 } = 3 \end{cases}$ ĐKXD: $0 \leq x; x \neq 9; y \neq \frac{1}{2}$	0,25
	Đặt: $\frac{1}{\sqrt{x-3}} = a; \frac{1}{ 2y-1 } = b$ HPT $\begin{cases} 4a + b = 5 \\ a + 2b = 3 \end{cases}$ Giải ra tìm được $a = 1; b = 1$	0,25
	Thay vào tìm x, y đối chiếu ĐKXD	0,25
	Kết luận nghiệm của hệ là (16;1) và (16;0)	0,25
	2) a) $x^2 - (m + 1)x + m - 1 = 0$ $\Delta = [-(m + 1)]^2 - 4(m - 1) = m^2 - 2m + 5$	0,25
	Chứng minh được $\Delta = (m - 1)^2 + 4 > 0 \forall m$ Kết luận phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.	0,25
	b) Vì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt với mọi m nên Theo Hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 1 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 1 \end{cases}$ Mà $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1^2x_2^2} = 1$ $\Rightarrow (m + 1)^2 - 2(m - 1) = (m - 1)^2$ $\Leftrightarrow m = -1$ Kết luận	0,25
BÀI IV (3,0đ)	Vẽ đúng hình đến phần 1 	0,25

1	<p>Chứng minh BOMH là tứ giác nội tiếp</p> <p>*Ta có: $\widehat{MOB} = 90^\circ$ ($MN \perp AB$)</p> <p>*Ta có: $\widehat{MHB} = 90^\circ$ ($MH \perp BC$)</p> <p>*Xét tứ giác BOMH có:</p> $\widehat{MOB} + \widehat{MHB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ <p>Mà hai góc này ở vị trí đối nhau</p> <p>Nên BOMH là tứ giác nội tiếp</p>	0,25 0,25 0,25
2	<p>Chứng minh HO là tia phân giác của góc MHB.</p> <p>Chứng minh $\widehat{OMB} = 45^\circ$</p> <p>Suy ra $\widehat{OHB} = 45^\circ$</p> <p>Suy ra HO là tia phân giác góc MHB</p>	0,25 0,25
	<p>Chứng minh: ME.MH = BE.HC</p> <p>Vì HO là tia phân giác của $\widehat{MHB} \Rightarrow \frac{ME}{BE} = \frac{MH}{HB}$ (1)</p> <p>Xét tam giác $\triangle BMC$ vuông tại M có MH là đường cao nên</p> $HM^2 = HC.HB \Rightarrow \frac{MH}{HB} = \frac{HC}{MH}$ (2) <p>Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{ME}{BE} = \frac{HC}{MH} \Rightarrow ME.MH = BE.HC$ (đpcm)</p>	0,25 0,25
3	<p>Gọi giao điểm của đường tròn (O) với đường tròn ngoại tiếp tam giác MHC là K. Chứng minh ba điểm C, K, E thẳng hàng.</p> <p>*Tứ giác BOMH nội tiếp</p> $\widehat{OHM} = \widehat{OBM} = 45^\circ$ suy ra: $\widehat{KHM} + \widehat{KHE} = 45^\circ$ (3) <p>Đường tròn ngoại tiếp tam giác CHM có CM là đường kính.</p> <p>MB vuông góc với MC nên MB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CHM.</p> <p>Suy ra: $\widehat{KHM} = \widehat{KME}$ (4)</p> <p>Xét đường tròn (O) có: $\widehat{KME} + \widehat{KBE} = 45^\circ$ (5)</p> <p>Từ (3), (4), (5) suy ra: $\widehat{KHE} = \widehat{KBE}$</p> <p>Suy ra tứ giác BEKH nội tiếp</p> <p>Suy ra: $\widehat{EBH} + \widehat{EKH} = 180^\circ$ (6)</p> <p>Mà $\widehat{EBH} = \widehat{CMH}$ (cùng phụ góc MCB)</p> <p>Xét đường tròn ngoại tiếp tam giác CHM có: $\widehat{CKH} = \widehat{CMH}$</p> <p>Suy ra $\widehat{EBH} = \widehat{CKH}$ (7)</p> <p>Từ (6) và (7) suy ra: $\widehat{CKH} + \widehat{EKH} = 180^\circ$</p> <p>Nên ba điểm E, K, C thẳng hàng.</p>	0,25 0,25 0,25 0,25

Bài V
(0,5đ)

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{1+y} + \frac{1+y}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{1+y} \cdot \frac{1+y}{4}} = x \\ \frac{y^2}{1+z} + \frac{1+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{y^2}{1+z} \cdot \frac{1+z}{4}} = y \\ \frac{z^2}{1+x} + \frac{1+x}{4} \geq 2\sqrt{\frac{z^2}{1+x} \cdot \frac{1+x}{4}} = z \end{cases}$$

0,25

Cộng vế với vế ba BĐT trên ta được:

$$\left(\frac{x^2}{1+y} + \frac{1+y}{4}\right) + \left(\frac{y^2}{1+z} + \frac{1+z}{4}\right) + \left(\frac{z^2}{1+x} + \frac{1+x}{4}\right) \geq (x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \geq -\frac{3}{4} - \frac{x+y+z}{4} + (x+y+z)$$

0,25

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} &\geq \frac{3(x+y+z)}{4} - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{xyz} - \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$. BĐT đã cho được chứng minh.